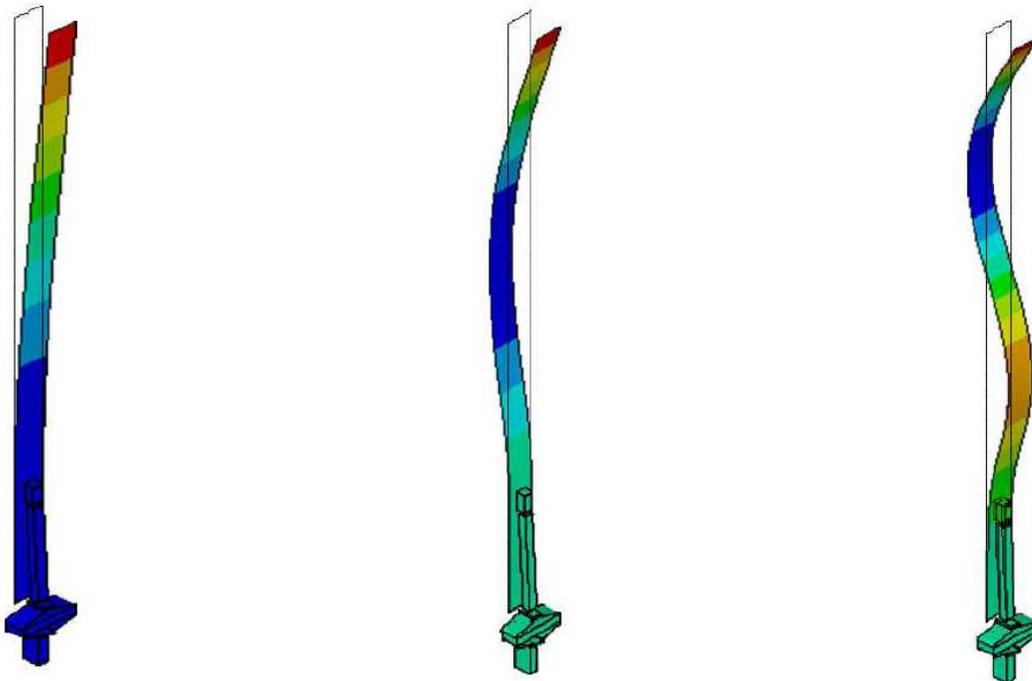


Adrien Badel
Fabien Formosa

POLYTECH ANNECY CHAMBERY

Travail pratique : Contrôle actif des vibrations des structures type poutre



Ce document est le support d'un travail pratique qui s'inscrit dans un module d'enseignement des vibrations.

Durée :

4 à 8h (selon les objectifs visés) en binôme ou trinôme

Niveau :

1^{er} à 3^e cycle d'ingénieur

Contexte :

On s'intéresse à l'étude du comportement vibratoire d'une structure de type poutre. L'instrumentation de celle-ci ainsi que l'ajout d'une boucle de commande permet d'aboutir à un système mécatronique dont l'amortissement peut être contrôlé activement

Objectifs pédagogiques:

Mécanique des solides : poutre en flexion encastree libre

Dynamique des structures : fréquences propres, oscillations libres, amortissement,

Automatismes / Asservissements : Contrôle PID, filtres notch, filtres passe bande,

Traitement du signal et capteurs : diagrammes de bode, analyse de convergence

Matériel nécessaire :

1 Kit TP Cedrat, 1 Oscilloscope, 1 GBF

Tous les assemblages 3D sont téléchargeables depuis notre site.

1. Description du montage expérimental

Le montage est constitué d'une structure, poutre, support, actionneur piézoélectrique et son montage. Ce montage est détaillé sur la figure suivante et le plan d'ensemble donné en annexe.



Montage complet



Accéléromètre



Actionneur Piézo
et son montage



Commande de
l'actionneur
Conditionnement
accéléromètre
Asservissement

Montage expérimental avec le boîtier de commande, conditionnement et asservissement et la structure instrumentée.

2. Présentation

On s'intéresse à l'étude du comportement vibratoire d'une structure de type poutre.

L'instrumentation de celle-ci ainsi que l'ajout d'une boucle de commande permet d'aboutir à un système mécatronique dont l'amortissement peut être contrôlé activement.

La conception d'un tel système est un processus à étapes successives qui correspondent approximativement au découpage des tâches à effectuer lors du TP :

- 1) Modélisation mécanique de la structure instrumentée
 - a) Modélisation analytique
 - b) Méthode de réduction et simplification de modèle
 - c) Prise en compte de l'actionneur piézoélectrique
- 2) Identification
- 3) Synthèse et mise en œuvre d'une loi de commande
 - a) Synthèse
 - b) Première mise en œuvre
 - c) Optimisation

Schéma et définition du paramétrage de la structure

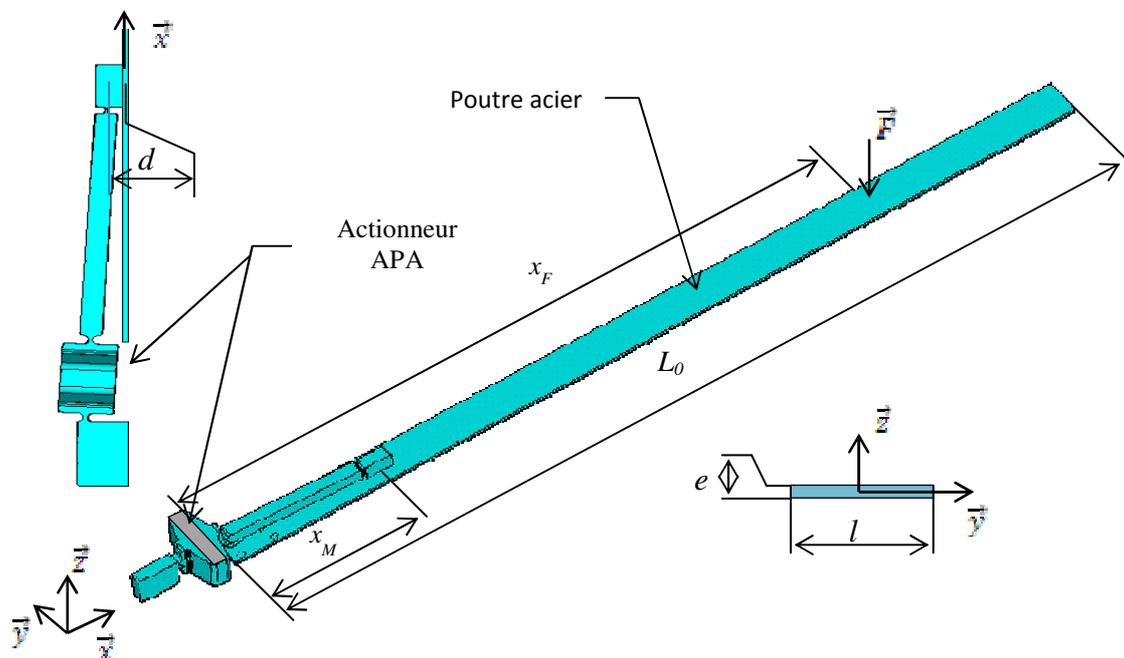


Figure 1. Schéma de la structure et paramétrage

La Figure 1 présente le schéma de la structure poutre, de l'actionneur piézoélectrique et de son bras de liaison. On note $l = 15$ mm la largeur de la poutre, $L_0 = 330$ mm sa longueur et $e = 2$ mm son épaisseur. La structure comporte un actionneur piézoélectrique de type APA utilisé au voisinage de l'encastrement ainsi qu'un accéléromètre à son extrémité.

Modélisation du comportement dynamique

Modélisation

On propose ici de travailler à partir d'un modèle de la structure simplifiée : une poutre encastree-libre dont les caractéristiques sont celles de la Figure 1. On note ρ la masse volumique et E le module d'Young du matériau utilisé (acier).

3. Mise en équations

Hypothèses :

- La section droite est indéformable
- Les déformations restent faibles
- L'inertie de rotation est négligeable devant l'inertie de translation
- Le déplacement d'un point M de la poutre est $W(x,t)$

Sans sollicitation extérieure, l'équilibre dynamique d'un tronçon de poutre est donné par l'équation (1) :

$$m \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1)$$

Où $m = \rho / e$ est la masse linéique de la poutre, $I = I_{G^2} / 12$ est le moment quadratique de la section droite par rapport à la fibre neutre.

L'équation des vibrations libres de la poutre se déduit de l'équation précédente en faisant l'hypothèse de mouvements harmoniques à la pulsation ω $W(x,t) = w(x) \sin(\omega t)$:

$$-\omega^2 m w(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left(E I \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = 0 \quad (2)$$

Quelles sont les conditions aux limites du problème mécanique ?

Modes et fréquences propres de la poutre

La solution de l'équation (2) est de la forme : $w(x) = a_1 \sin(\omega x) + a_2 \cos(\omega x) + a_3 \sinh(\omega x) + a_4 \cosh(\omega x)$

Où $\beta^4 = \omega^2 m / E I$.

En tenant compte des conditions aux limites, et en cherchant les solutions non nulles qui y satisfont, on obtient les fréquences propres de la poutre.

$$f_{pi} = 1/2\pi \sqrt{\left(\mu_i/L_0\right)^4 EI/m} \quad (3)$$

Les trois premières valeurs de ω_i sont : $\omega_1 = 1,875$ | $\omega_2 = 4,694$ | $\omega_3 = 7,855$

Calculer les trois premières fréquences propres.

Expérimentalement, à l'aide de l'actionneur électromagnétique, déterminer les fréquences de résonance des premiers modes qu'on notera f_{r1} , f_{r2} etc...

Comparer les valeurs théoriques et expérimentales et expliquer les écarts constatés.

Les modes propres peuvent être exprimés en choisissant arbitrairement $a_1 = 1$, ainsi :

$$\varphi_i(x) = \sin(\omega x) + a_2 \cos(\omega x) + a_3 \sinh(\omega x) + a_4 \cosh(\omega x) \quad (4)$$

Où les coefficients a_i ($i = 2..4$) sont tels qu'ils satisfont le système d'équation (5) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos(b L_0) & \sinh(b L_0) & \cosh(b L_0) \\ \sin(b L_0) & \cosh(b L_0) & \sinh(b L_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sin(b L_0) \\ \cos(b L_0) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Les modes propres constituent une base vectorielle orthogonale au sens du produit scalaire :

$\int_0^{L_0} \phi_i(x) \phi_j(x) dx$. De plus, les modes propres sont définis à une constante multiplicative près (précédemment, on a choisi arbitrairement $a_1 = 1$).

Montrer qu'on a la propriété (6) suivante (exploiter le fait que les modes sont solutions de l'équation (2)) :

$$\int_0^{L_0} \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} \int_0^{L_0} \phi_i(x) \phi_i(x) dx, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

Exprimer les équations des trois premiers modes tels que $\varphi_i(L_0) = 1$.
Tracer l'allure des trois premiers modes.

En utilisant un logiciel de modélisation par éléments finis, il est possible d'obtenir de manière plus précise les modes propres de la structure. La Figure 2 présente l'allure des trois premiers modes de la structure du banc de TP. Les modes obtenus présentent bien les mêmes formes que l'approche simplifiée à partir de laquelle des éléments de conception vont donc pouvoir être dégagés.

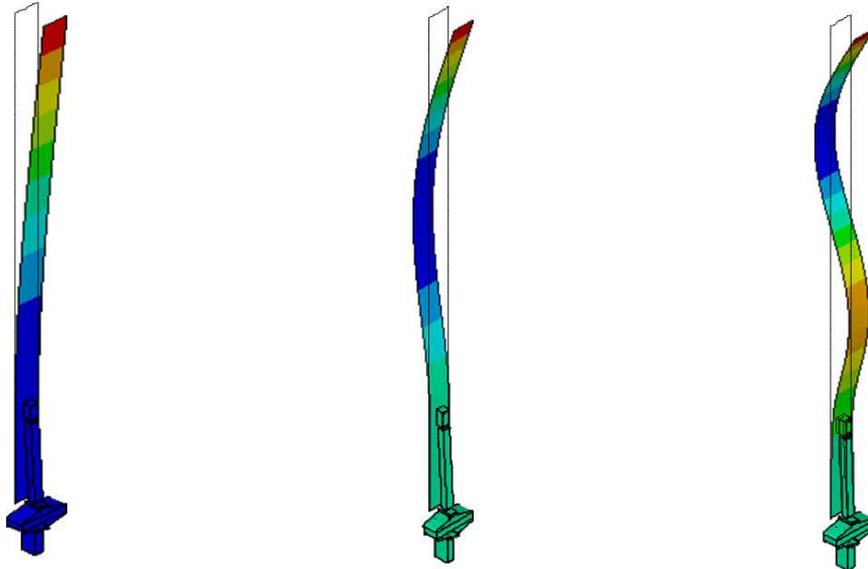


Figure 2. Allure des trois premiers modes propres de la structure

Prise en compte d'une force transversale appliquée au point x_F

En première approximation l'effet de l'électroaimant peut être modélisé par une force transversale notée F suivant la direction \vec{z} au point d'abscisse x_F (Figure 1). La prise en compte de celle-ci se fait en modifiant le second membre de l'équation d'équilibre dynamique (1) de la façon suivante :

$$m W(x, t) + EI \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} = F(t) \delta(x - x_F) \tag{7}$$

Où $\delta(x - x_F) = \begin{cases} 1, & x = x_F \\ 0, & x \neq x_F \end{cases}$, et on a $\int_0^{L_0} \delta(x - x_F) \Phi_i(x) dx = \Phi_i(x_F)$

Réduction et simplification du modèle

Réduction de modèle

La résolution directe de l'équation (7) est difficile. Une approche classique consiste à chercher la solution en approximant le champ de déplacement à partir de plusieurs fonctions qui satisfont Les conditions aux limites de type cinématique (ici l'encastrement). C'est ce qu'on appelle une méthode de Ritz.

En choisissant les modes propres de la structure comme fonctions d'approximation et en exploitant le principe des travaux virtuels, on peut ramener la résolution de l'équation du 2^{ème} ordre en temps et du 4^{ème} ordre en espace précédente à celle d'un système de plusieurs équations découplées du 2^{ème} ordre en temps.

$$W(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \Phi_i(x)$$

On pose ainsi $q_i(t)$, où les $q_i(t)$ sont les coordonnées généralisées et les $\Phi_i(x)$ les modes propres de la structures tels que $\Phi_i(L_0) = 1$ ($i = 1..n$). n est le nombre de mode choisi qui dépend en particulier de la bande de fréquence d'intérêt. En remplaçant dans l'équation (7), et en évaluant le travail virtuel pour un déplacement $\Phi_j(x)$, on obtient :

$$\int_0^{L_0} \left(\sum_{i=1}^n m \ddot{q}_i(t) \Phi_i(x) \Phi_j(x) + \sum_{i=1}^n EI \frac{q_i(t) (d^4 \Phi_i(x))}{dx^4} \Phi_j(x) \right) dx = \int_0^{L_0} F \delta(x - x_F) \Phi_j(x) dx \tag{8}$$

En exploitant les propriétés d'orthogonalité des modes (équation (6)), montrer qu'on obtient n équations découplées et donner l'expression de M_i , K_i et β_i :

$$M_i \ddot{q}_i(t) + K_i q_i(t) = \beta_i F \quad (9)$$

On a bien ramené ainsi, la résolution de l'équation (7) à celle d'un système de plusieurs équations découplées.

Tracer l'évolution du coefficient β_i pour les trois premiers modes en fonction de $x_M \in [0, L_0]$.

En se plaçant à la fréquence du premier mode, relever expérimentalement l'amplitude de l'accélération pour x_M variant de 150 mm à 200 mm tous les 10 mm. Retrouve-t-on l'évolution prédite analytiquement ?

En se plaçant à la fréquence du deuxième mode, relever expérimentalement l'amplitude de l'accélération pour x_M variant de 150 mm à 200 mm tous les 10 mm. Retrouve-t-on l'évolution prédite analytiquement ?

Que peut-on en déduire pour le placement d'un actionneur ?

L'amortissement n'apparaît pas dans l'équation (7). En pratique, dès lors que le problème est sous la forme (9), on ajoute un amortissement modal D_i dont la valeur est mesurée expérimentalement. Cette identification sera menée plus tard. On obtient alors n équations :

$$M_i \ddot{q}_i(t) + D_i \dot{q}_i(t) + K_i q_i(t) = \beta_i F \quad (10)$$

Prise en compte de l'actionneur APA et du capteur

Etude de l'actionneur APA

Un actionneur APA est constitué d'un empilement de céramiques piézoélectriques enchâssé dans une structure métallique qui permet l'amplification et la précontrainte. On propose ici de s'intéresser à l'empilement.

Chaque céramique possède un comportement piézoélectrique. L'orientation des propriétés piézoélectriques ainsi que l'électrodage des céramiques font qu'on considère ici uniquement le comportement 1D de l'empilement.

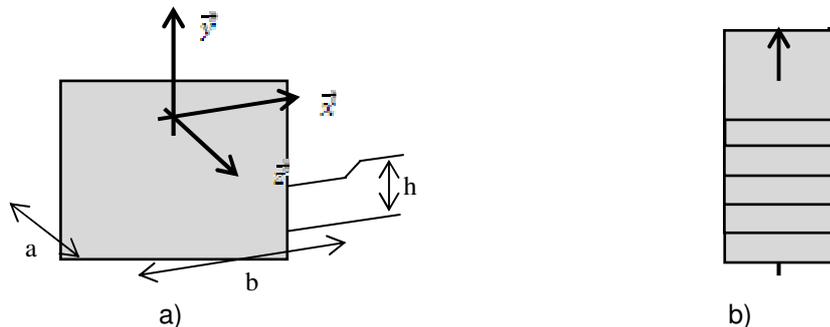


Figure 3. Paramétrage d'une céramique (a), empilement de céramiques (b)

Les relations de comportement dans la direction \vec{y} sont :

$$\begin{cases} T_y = C_{Eyy} S_y - e_{yy} E_y \\ D_y = e_{yy} S_y + \epsilon_{Sy} E_y \end{cases} \quad (11)$$

Où T_y est la contrainte de traction-compression, S_y la déformation, E_y le champ électrique et D_y le vecteur déplacement électrique. ϵ_{Sy} est la permittivité à déformation constante et e_{yy} le coefficient de couplage piézoélectrique.

On donne les relations suivantes :

- $E = V/h$
- $\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} D_y dx dz = Q$ (équation d'équilibre électrique)

Intégrer les relations de comportement (11) sur une section de la céramique. En notant F_y l'effort normal (dans la direction \vec{y}) et en remarquant que $S_y = \Delta y/h$, donner l'expression des relations entre F_y , Δy et V d'une part, et Q , Δy et V d'autre part.

Les céramiques piézoélectriques sont assemblées en parallèle électriquement et en série mécaniquement.

A partir des équations obtenues précédemment, déterminer les équations de comportement globales pour un assemblage de n céramiques et montrer qu'on a alors :

$$\begin{cases} F_y = K_{\text{éq}} \Delta y - e_{yy} ab/h V \\ Q = e_{yy} ab/h \Delta y + C_{\text{éq}} V \end{cases} \quad (12)$$

Donner les expressions de $K_{\text{éq}}$ et $C_{\text{éq}}$.

La structure métallique de l'APA permet l'amplification du déplacement $\square y$ de l'assemblage de céramiques. On notera A_p cette amplification

Compte tenu de l'architecture globale de la structure du banc, et en exploitant le schéma de la Figure 1, montrer que l'effet de l'actionneur se ramène à une force de traction-compression et un moment de flexion M_p sur la poutre.

Exprimer le déplacement $\square y$ en fonction de la rotation de la section de poutre en x_M : $\frac{\partial W}{\partial x(x_M, t)}$

Donner l'expression des relations entre M_p , $\frac{\partial W}{\partial x(x_M, t)}$ et V d'une part, et Q , $\frac{\partial W}{\partial x(x_M, t)}$ et V d'autre part.

Dans la suite, on fait l'hypothèse que les comportements de traction-compression et de flexion sont découplés. Ainsi, on peut négliger l'action de l'actionneur en traction-compression. En effet, la première fréquence propre de traction-compression est beaucoup plus élevée que les premières fréquences propres de flexion. La force selon \vec{x} excite la poutre de manière quasi-statique et la raideur de celle-ci font que cet effet est très faible.

Prise en compte d'un moment de flexion appliqué au point x_M

La prise en compte d'un moment de flexion localisé en x_M suivant la direction \vec{y} se fait en modifiant le second membre de l'équation d'équilibre dynamique.

$$m \ddot{W} + E I \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{\partial M_p \delta(x - x_M)}{\partial x} \quad (13)$$

Où $\delta(x - x_M) = \begin{cases} 1, & x = x_M \\ 0, & x \neq x_M \end{cases}$

Appliquer la même méthode qu'au paragraphe 2.2.1 et montrer qu'on obtient cette fois n équations différentielles en temps :

$$M_i \ddot{q}_i(t) + K_i q_i(t) = \gamma_i M_p \quad (14)$$

Montrer que $\gamma_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x(x_M)}$ et tracer l'évolution de $\square y_i$ en fonction de x_M pour les trois premiers modes. Que peut-on en déduire ?

Pour prendre en compte de manière rigoureuse l'effet de raideur de l'actionneur piézoélectrique, les modes propres doivent être recalculés pour une structure mécanique qui intègre l'effet mécanique de l'actionneur piézoélectrique et du bras (ce que permet un modèle EF). Ainsi, on peut supposer ici que le moment M_p est uniquement associé au couplage piézoélectrique.

On a finalement : $M_p = -\alpha d V$

Exprimer le coefficient α en fonction de A_p , a , b et e_{yy} .

Modèle complet

On tient compte ici de la structure, de l'APA et de l'actionneur électromagnétique.

Ecrire l'équation d'équilibre mécanique et l'équation d'équilibre électrique en ne considérant que le premier mode.

Ecrire les équations d'équilibre mécanique et l'équation d'équilibre électrique en considérant les deux premiers modes.

Identification du modèle

On considère que le comportement du dispositif est modélisé par le système d'équations (15) :

$$\begin{cases} M_1 \ddot{q}_1 + D_1 \dot{q}_1 + K_1 q_1 - \alpha_1 V = \beta_1 F \\ I = \alpha_1 \dot{q}_1 + C_{\dot{q}_1} \dot{V} \end{cases} \quad (15)$$

Ce modèle est valable tant que la poutre est excitée autour de sa première fréquence de résonance.

- M_1 est la masse dynamique
- D_1 correspond aux pertes mécaniques
- K_1 correspond à la raideur du système
- α_1 est le coefficient traduisant le couplage électromécanique de la structure
- $C_{\dot{q}_1}$ est la capacité de l'actionneur piézoélectrique
- q_1 est le déplacement de l'extrémité libre de la poutre
- V est la tension sur l'actionneur piézoélectrique
- I est le courant entrant dans l'actionneur piézoélectrique

Il s'agit de déterminer expérimentalement les paramètres M_1 , K_1 , D_1 , α_1 et C .

A l'aide d'un capacimètre, mesurer la capacité électrique de l'actionneur piézoélectrique. Comparer cette valeur avec celle donnée dans la documentation technique de l'APA.

A l'aide de l'électroaimant, exciter la poutre en régime sinusoïdal à sa première fréquence de résonance f_{r1} , l'actionneur piézoélectrique étant laissé en circuit ouvert. Observer à l'oscilloscope et de façon synchrone, le signal issu de l'accéléromètre et la tension générée aux bornes de l'actionneur piézoélectrique.

A partir de la deuxième équation du système (15), donner l'expression de la tension V en fonction de q_1 lorsque l'actionneur est en circuit ouvert ($I = 0$)

Donner l'expression de l'amplitude du déplacement q_1 en fonction de l'amplitude du signal issu de l'accéléromètre. En déduire la valeur de coefficient α_1 .

La poutre est maintenant excitée par l'intermédiaire de l'actionneur piézoélectrique alimenté avec une tension sinusoïdale d'amplitude 20V et de fréquence variable.

Relever l'amplitude du déplacement de la poutre en fonction de la fréquence d'excitation pour des fréquences comprises entre $f_{r1}/2$ et $2 f_{r1}$.

Ce relevé correspond à la réponse fréquentielle de la fonction de transfert suivante :

$$\alpha_1 G_1(p) = \frac{\alpha_1}{M_1 p^2 + D_1 p + K_1} \quad (16)$$

On définit les grandeurs caractéristiques suivantes associée à cette fonction de transfert :

- Fréquence propre (pour laquelle le déphasage vaut $\pi/2$) : $f_{p1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{M_1}}$
- Facteur de qualité : $Q_1 = \frac{f_{r1}}{\Delta f} = \frac{K_1}{2\pi D_1 f_{p1}}$, où Δf est la bande passante à -3dB

Déterminer f_{p1} et Q_1 .

En observant qu'à la fréquence propre du dispositif le module de la fonction de transfert est égal à $\alpha_1/(2\pi D_1 f_{p1})$, déterminer D_1 . En déduire K_1 et M_1 . Que peut-on dire de la masse M_1 par rapport à la masse de la poutre ?

Synthèse et mise en œuvre de loi de commande

Principe théorique

En l'absence de contrôle actif ($V = 0$), la fonction de transfert entre la force extérieure perturbatrice et le déplacement de l'extrémité libre de la poutre est donnée par l'équation(18).

Celle-ci présente une résonance aigüe, qui implique des déplacements très importants dès lors que le spectre fréquentiel de la perturbation coïncide avec la fréquence de résonance f_{r1} .

$$\Gamma_{BO}(p) = \beta_1 G_1(p) \quad (17)$$

Montrer que $\Gamma_{BO}(p)$ peut se mettre sous la forme de l'équation (18) ci-dessous, et donner les expressions des paramètres Q_{BO} et ω_{BO} .

$$\Gamma_{BO}(p) = \frac{\frac{\beta_1}{K_1}}{1 + \frac{p}{Q_{BO}\omega_{BO}} + \frac{p^2}{\omega_{BO}^2}} \quad (18)$$

L'objectif du contrôle actif de vibration est de modifier cette fonction de transfert en atténuant le plus possible la résonance. Le schéma bloc du dispositif de contrôle est représenté sur la Figure 4 pour laquelle, on définit :

- $G_1(p)$: la fonction de transfert de la poutre (on ne considère ici qu'un mode)
- Sc : la sensibilité de l'accéléromètre (200mV/g)
- G_A : le gain de l'amplificateur de puissance qui alimente l'actionneur
- F_{ext} : la perturbation extérieure (ici l'actionneur électromagnétique)
- q_1 : le déplacement de l'extrémité libre de la poutre
- $C(p)$: le correcteur à synthétiser pour modifier le comportement vibratoire de la poutre

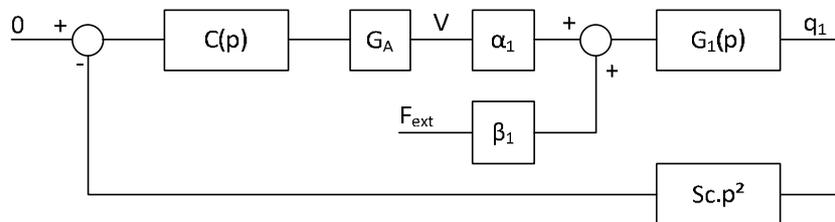


Figure 4. Principe du contrôle de vibration

Justifier chaque élément du schéma bloc et l'associer aux différents éléments du dispositif expérimental.

Pourquoi la consigne est-elle nulle ?

Le correcteur $C(p)$ est un correcteur proportionnel intégral (PI) dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = P + \frac{I}{p} \quad (19)$$

Calculer la fonction de transfert $\Gamma_{BF1}(p)$ entre la force extérieure perturbatrice et le déplacement de l'extrémité libre de la poutre en boucle fermée.

Montrer que cette fonction de transfert peut être exprimée sous la forme suivante :

$$(20)$$

Le terme Q_{BF} est le facteur de qualité du système en boucle fermée. Une interprétation physique de ce paramètre est le nombre approximatif d'oscillations avant retour à l'équilibre. La pseudo-fréquence de ces oscillations sera proportionnelle à ω_{BF} .

De façon à avoir un retour à l'équilibre le plus rapide possible, on veut Q_{BF} petit et ω_{BF} grand.

Justifier le choix de Q_{BF} petit et ω_{BF} grand.

Proposer un réglage du correcteur PI permettant de revenir à l'équilibre en 2 pseudo-périodes les plus courtes possibles (la programmation numérique du correcteur nous impose d'avoir P et I positifs ou nuls).

A l'aide de Matlab™ ou Scilab™, déterminer les marges de gain et de phase théorique du schéma de contrôle proposé ? Conclusions.

Première mise en œuvre

On choisit le réglage suivant pour le correcteur $C(p)$:

- $P = 0$
- $I = 2200$
- Pas de filtre additionnel

A l'aide de l'application HDPM45 (cf. Figure 5), régler le correcteur comme indiqué, puis placer le commutateur sur la position « servo-on ». Faire un lâcher. Le système est-il stable ?

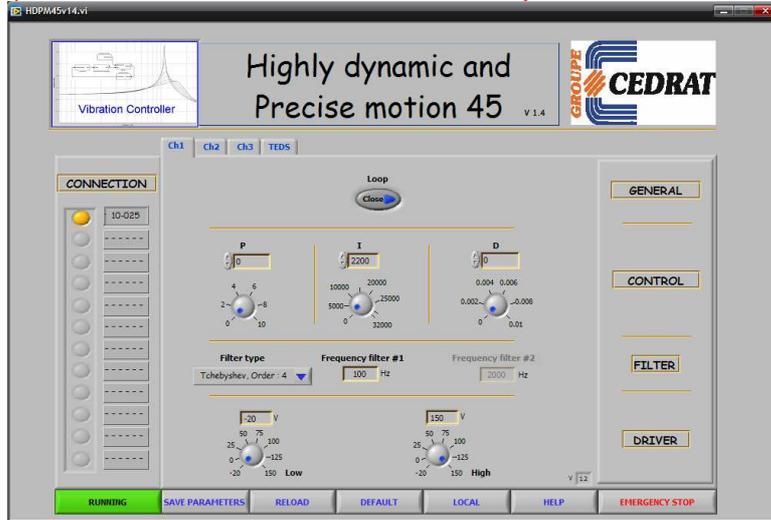


Figure 5. Application HDPM45

L'instabilité observée ne peut pas s'expliquer si l'on ne considère que le premier mode de vibration de la poutre. Il faut élaborer un modèle bimodal de la poutre pour comprendre d'où vient l'instabilité.

En utilisant la même procédure que pour le premier mode, identifier les paramètres M_2 , K_2 , D_2 et α_2 associés au deuxième mode.

On définit alors la fonction de transfert suivante, associée au mode 2 :

$$\alpha_2 G_2(p) = \frac{\alpha_2}{M_2 p^2 + D_2 p + K_2} \quad (21)$$

Le schéma bloc du dispositif est alors représenté par la Figure 6.

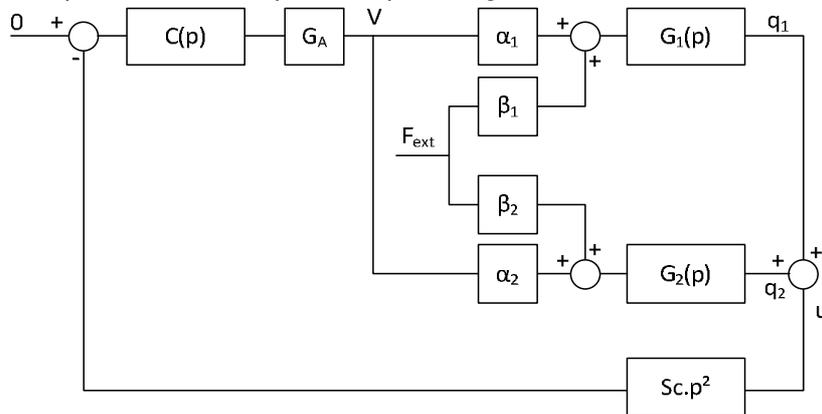


Figure 6. Principe du contrôle de vibration, modèle à 2 modes

Calculer la fonction de transfert $\Gamma_{BF}(p)$ entre la force extérieure perturbatrice et le déplacement de l'extrémité libre de la poutre en boucle fermée. Montrer que cette fonction de transfert peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\Gamma_{BF}(p) = \frac{\frac{\beta_1}{K_1}}{1 + \frac{p}{Q_{BF1}\omega_{BF1}} + \frac{p^2}{\omega_{BF1}^2}} + \frac{\frac{\beta_2}{K_2}}{1 + \frac{p}{Q_{BF2}\omega_{BF2}} + \frac{p^2}{\omega_{BF2}^2}} \quad (22)$$

Tracer l'évolution de Q_{1BF} et Q_{2BF} en fonction de I . Préciser pour quel intervalle de I le contrôle est stable. Conclusion.

Filtrage de l'action intégrale

L'action du correcteur intégral permet d'amortir le premier mode, mais tend à rendre instable le deuxième. Une solution consiste ainsi à filtrer la sortie du correcteur de manière à ce qu'il n'agisse que sur le premier mode.

On choisit un filtre passe-bas de type Tchebychev II d'ordre 4, dont la fréquence de coupure est fixée à 100Hz. La fonction de transfert de ce filtre est donnée par l'équation (23) :

$$FT_{100}(p) = \frac{0,03162 p^4 + 99870 p^2 + 3,943 10^{10}}{p^4 + 1109 p^3 + 618000 p^2 + 2,021 10^8 p + 3,943 10^{10}} \quad (23)$$

Tracer le diagramme de Bode de ce filtre, et expliquer pourquoi son usage est bien adapté au dispositif étudié.

Ce filtre est placé à la suite de l'intégrateur. Le correcteur $C(p)$ est donc désormais défini par :

$$C(p) = \left(P + \frac{I}{p} \right) FT_{100}(p) \quad (24)$$

Tracer le diagramme de Bode théorique de la nouvelle fonction de transfert $\Gamma_{BF2F}(p)$ et le comparer avec le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $\Gamma_{BO2}(p) = \beta_1 G_1(p) + \beta_2 G_2(p)$

A l'aide de Matlab™ ou Scilab™, étudier les marges de gain et de phase. Peut-on raisonnablement augmenter la valeur de I de façon à améliorer les performances ?

On choisit finalement le réglage suivant pour le correcteur $C(p)$:

- $P = 0$
- $I = 2200$
- Filtre de Tchebychev à 100Hz

Après avoir régler le correcteur suivant les paramètres précédents, relever l'amplitude du déplacement de la poutre en fonction de la fréquence d'excitation pour des fréquences comprises entre $f_{r1}/2$ et $2f_{r2}$. Conclusion ?

Effectuer un lâcher. En combien d'oscillations le système est-il amorti ? Conclusion ?

Amortissement bimodal

A partir des observations précédentes, quelles devraient être les caractéristiques d'un filtre permettant d'amortir simultanément les modes 1 et 2 ?

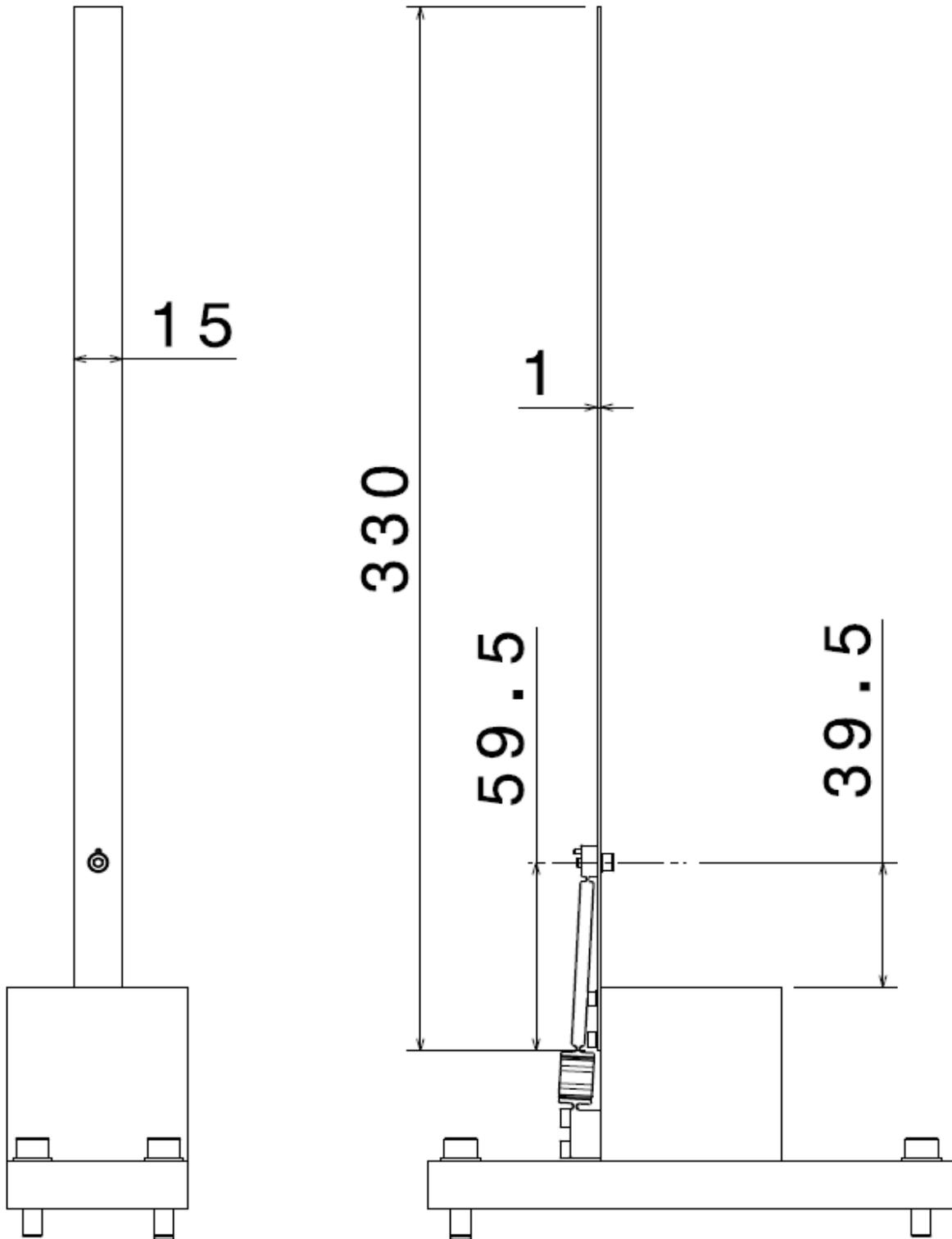
On choisit le réglage suivant pour le correcteur $C(p)$:

- $P = 0$
- $I = 2200$
- Filtre de Tchebychev à 500Hz

Après avoir régler le correcteur suivant les paramètres précédents, relever l'amplitude du déplacement de la poutre en fonction de la fréquence d'excitation pour des fréquences comprises entre $f_{r1}/2$ et $2f_{r2}$. Faire également un essai de lâcher. Conclusion ?

Donner l'expression de l'amplitude du déplacement q_1 en fonction de l'amplitude du signal issu de l'accéléromètre. En déduire la valeur de coefficient α_1 .

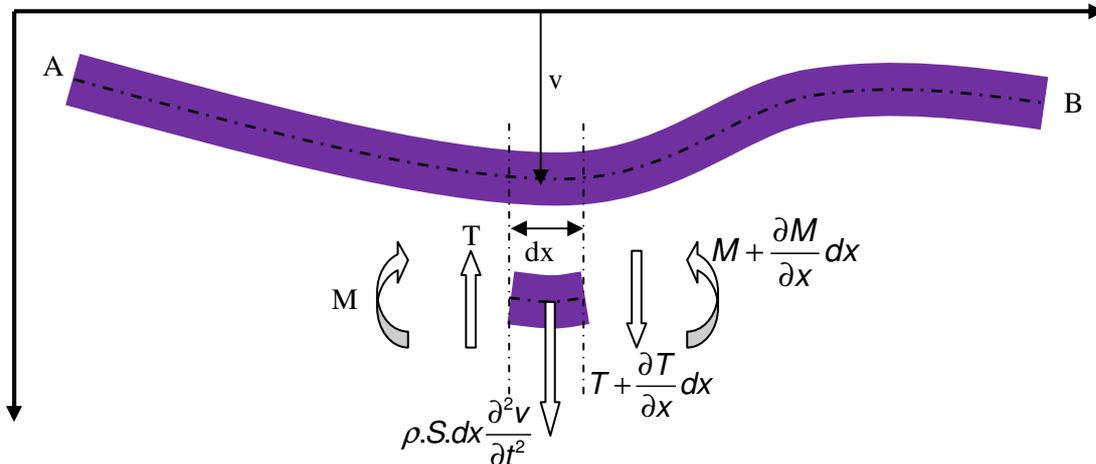
ANNEXE 1: plan du montage expérimental



ANNEXE 2 : Théorie des poutres de type Euler - Bernoulli

Modes propres de poutres

Le modèle d'une poutre de type Euler – Bernoulli.



Les efforts tranchants (projetés sur Oy) conduisent à :

$$-T + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) = \rho.S.dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \text{ soit : } \frac{\partial T}{\partial x} = \rho.S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Les moments (exprimé sur la partie droite du volume élémentaire conduisent à :

$$-T \cdot dx - M + \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = 0 \text{ soit } T = \frac{\partial M}{\partial x} \text{ (on néglige l'inertie de rotation)}$$

Par ailleurs la RDM nous fournit l'expression du Moment fléchissant :

$$M = -E.I. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ (Avec E le module d'Young et I, le moment d'inertie quadratique en flexion de la section droite)}$$

La dynamique d'une poutre est donc décrite par :

$$E.I. \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho.S. \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \text{ (dans le cas ou la poutre est excitée en force, le second membre est non nul)}$$

Ce qui par Transformée de Fourier conduit à :

$$\frac{\partial^4 \hat{V}}{\partial x^4} - \omega^2 \frac{\rho.S}{E.I} \hat{V} = 0$$

Dont la solution générale est de la forme :

$$V = A \cdot \sin(\lambda \cdot x) + B \cdot \cos(\lambda \cdot x) + C \cdot \text{sh}(\lambda \cdot x) + D \cdot \text{ch}(\lambda \cdot x) \quad \text{Avec : } \lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho.S.\omega^2}{E.I}}$$

Les conditions aux limites de la poutre permettent de restreindre la forme générale de la solution :

$$V = A \cdot \sin(\lambda \cdot x) + B \cdot \cos(\lambda \cdot x) + C \cdot \text{sh}(\lambda \cdot x) + D \cdot \text{ch}(\lambda \cdot x) = 0 \quad \text{appui \& encastrement (flèche=0)}$$

$$\frac{d}{dx} V = (A \cdot \cos(\lambda \cdot x) - B \cdot \sin(\lambda \cdot x) + C \cdot \text{ch}(\lambda \cdot x) + D \cdot \text{sh}(\lambda \cdot x)) \cdot \lambda = 0 \quad \text{encastrement (pente =0)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} V = (-A \cdot \sin(\lambda \cdot x) - B \cdot \cos(\lambda \cdot x) + C \cdot \text{sh}(\lambda \cdot x) + D \cdot \text{ch}(\lambda \cdot x)) \cdot \lambda^2 = 0 \quad \text{libre \& appui (moment=0)}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} V = (-A \cdot \cos(\lambda \cdot x) + B \cdot \sin(\lambda \cdot x) + C \cdot \text{ch}(\lambda \cdot x) + D \cdot \text{sh}(\lambda \cdot x)) \cdot \lambda^3 = 0 \quad \text{libre (effort tranchant=0)}$$

Dans le cas d'une **poutre Cantilever (encastrée - libre)** les solutions sont définies par : $1 + \cos(\lambda \cdot L) \cdot \text{ch}(\lambda \cdot L) = 0$

Dont les solutions sont :

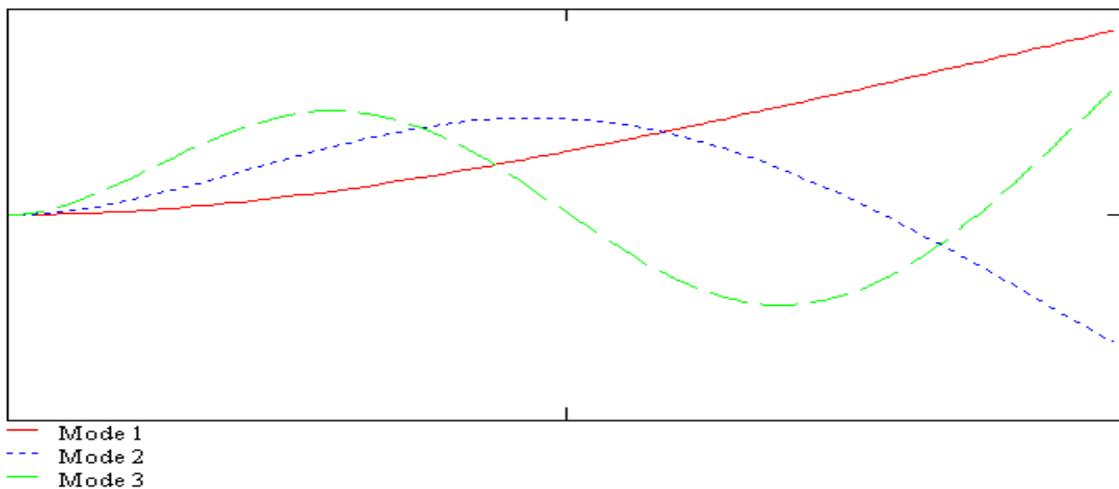
$$\lambda L := \begin{bmatrix} 1.875 \\ 4.694 \\ 7.855 \\ 10.995 \\ 14.137 \\ 17.279 \\ 20.42 \end{bmatrix}$$

Pour les modes d'ordre plus élevé la solution peut être approximée : $\lambda_k L = (k + \frac{1}{2}) \pi$

La déformée est de la forme : $v := \sin(\lambda \cdot x) + B \cdot \cos(\lambda \cdot x) - \text{sh}(\lambda \cdot x) - B \cdot \text{ch}(\lambda \cdot x)$

Avec :

$$B = \frac{\sin(\lambda \cdot L) + \text{sh}(\lambda \cdot L)}{\cos(\lambda \cdot L) + \text{ch}(\lambda \cdot L)} = \frac{\cos(\lambda \cdot L) + \text{ch}(\lambda \cdot L)}{-\sin(\lambda \cdot L) + \text{sh}(\lambda \cdot L)}$$



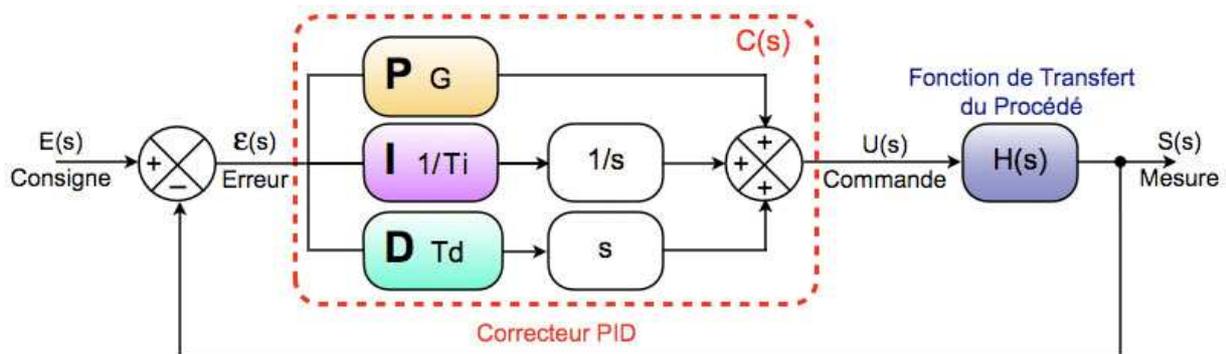
ANNEXE 3 : Asservissements P.I.D. source wikipédia

Principe général

L'erreur observée est la différence entre la consigne et la mesure. Le PID permet 3 actions en fonction de cette erreur :

- Une action **Proportionnelle** : l'erreur est multipliée par un gain G
- Une action **Intégrale** : l'erreur est intégrée sur un intervalle de temps s , puis divisée par un gain T_i
- Une action **Dérivée** : l'erreur est dérivée suivant un temps s , puis multipliée par un gain T_d

Il existe plusieurs architectures possibles pour combiner les 3 effets (série, parallèle ou mixte), on présente ici une architecture parallèle :



La fonction de transfert avec la transformée de Laplace du régulateur PID parallèle est la somme des 3 actions:

$$C(s) = G + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{1}{s} + T_d \cdot s = \frac{G \cdot T_i \cdot s + 1 + T_d \cdot T_i \cdot s^2}{T_i \cdot s}; \quad s = \frac{du}{dt}$$

Les différents paramètres à trouver sont G , T_d et T_i pour réguler le procédé ayant pour fonction de transfert $H(s)$. Il existe de nombreuses méthodes pour trouver ces paramètres. Cette recherche de paramètre est communément appelée *synthèse*. La procédure expérimentale pour calculer ces paramètres s'appelle aussi *procédure d'identification paramétrique*. La fonction de transfert du contrôleur PID idéale est irréalisable car l'ordre du numérateur est supérieur à l'ordre du dénominateur. Dans la réalité, on rajoute toujours un paramètre alpha sur l'action dérivée de manière à obtenir un ordre 2 au numérateur et au dénominateur :

$$T_d \cdot s \rightarrow \frac{T_d \cdot s}{1 + \alpha \cdot T_d \cdot s}$$

avec $\alpha \ll 1$ On obtient alors une nouvelle fonction de transfert réalisable :

$$C(s) = \frac{(G \cdot T_i \cdot T_d \cdot \alpha + T_d \cdot T_i) s^2 + (G \cdot T_i + \alpha \cdot T_d) \cdot s + 1}{\alpha \cdot T_i \cdot T_d \cdot s^2 + T_i \cdot s}$$

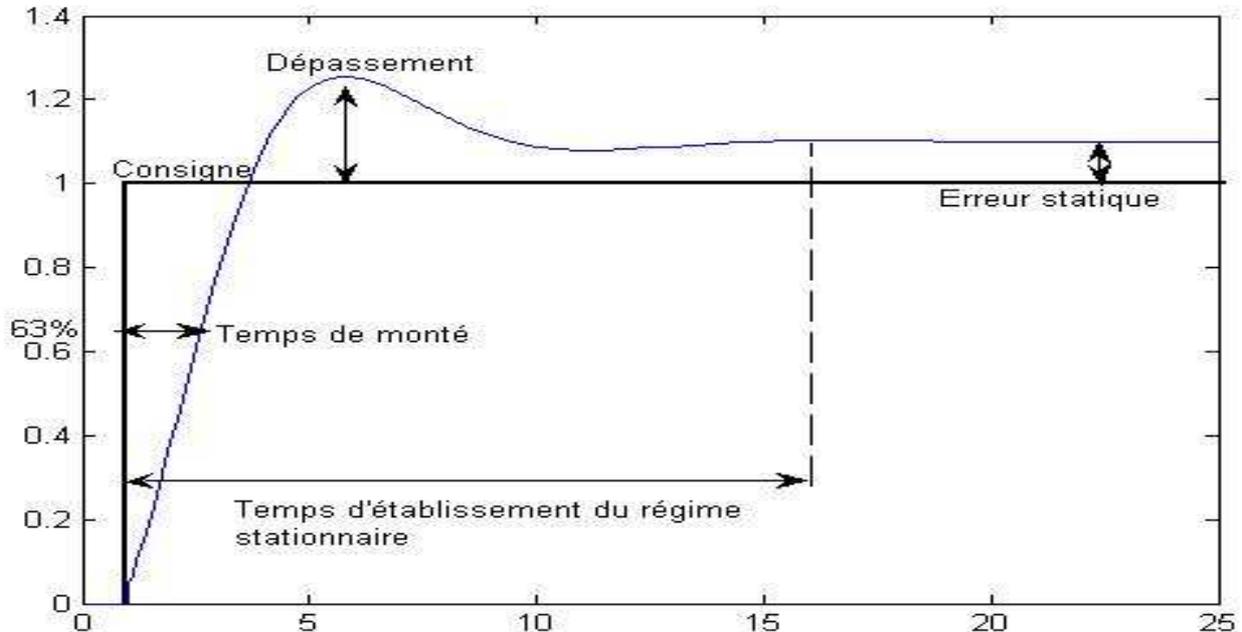
Néanmoins, pour limiter les effets néfastes du bruit du signal de mesure sur le signal de commande u , on modère l'effet de l'action dérivée dans les régulateurs industriels en adoptant généralement alpha : $\alpha \approx 0,1$.

Réglage d'un PID

Le réglage d'un PID consiste à déterminer les coefficients G , T_d et T_i afin d'obtenir une réponse adéquate du procédé et de la régulation. L'objectif est d'être **robuste**, **rapide** et **précis**. Il faut pour cela limiter le ou les éventuels **dépassements** (*overshoot*).

- La robustesse est sans doute le paramètre le plus important et délicat. On dit qu'un système est robuste si la régulation fonctionne toujours même si le modèle change un peu. Par exemple, les fonctions de transfert de certains procédés peuvent varier en fonction de la température ambiante ou de l'hygrométrie ambiante relativement à la loi de Pascal. Un régulateur doit être capable d'assurer sa tâche même avec ces changements afin de s'adapter à des usages non prévus/testés (dérive de production, vieillissement mécanique, environnements extrêmes...).
- La rapidité du régulateur dépend du temps de montée et du temps d'établissement du régime stationnaire.
- Le critère de précision est basé sur l'erreur statique (ou de statisme).

La réponse type d'un procédé stable est la suivante :



Les paramètres du PID influencent la réponse du système de la manière suivante :

- **G** : Lorsque G augmente, le temps de montée (*rise time*) est plus court mais il y a un dépassement plus important. Le temps d'établissement varie peu et l'erreur statique se trouve améliorée.
- **Ti** : Lorsque $1/T_i$ augmente, le temps de montée est plus court mais il y a un dépassement plus important. Le temps d'établissement au régime stationnaire s'allonge mais dans ce cas on assure une erreur statique nulle. Donc plus ce paramètre est élevé, plus la réponse du système est ralentie.
- **Td** : Lorsque T_d augmente, le temps de montée change peu mais le dépassement diminue. Le temps d'établissement au régime stationnaire est meilleur. Pas d'influences sur l'erreur statique. Si ce paramètre est trop élevé dans un premier temps il stabilise le système en le ralentissant trop mais dans un deuxième temps le régulateur anticipe trop et un système à temps mort élevé devient rapidement instable.

Pour ces trois paramètres, le réglage au-delà d'un seuil trop élevé a pour effet d'engendrer une oscillation du système de plus en plus importante menant à l'instabilité.

L'analyse du système avec un PID est très simple mais sa conception peut être délicate, voire difficile, car il n'existe pas de méthode unique pour résoudre ce problème. Il faut trouver des compromis, le régulateur idéal n'existe pas. En général on se fixe un cahier des charges à respecter sur la robustesse, le dépassement et le temps d'établissement du régime stationnaire. Les méthodes de réglage les plus utilisées en théorie sont la méthode de Ziegler-Nichols, la méthode de P. Naslin (polynômes normaux à amortissement réglable), la méthode du lieu de Nyquist inverse (utilise le diagramme de Nyquist).

Dans la pratique, les professionnels utilisent soit l'identification par modèle de Broïda pour les systèmes stables ou le modèle intégrateur retardé pour les systèmes instables soit la méthode par approches successives, qui répond à une procédure rigoureuse : on règle d'abord l'action P seule pour avoir un dépassement de 10 à 15% puis l'action dérivée de façon à "raboiter" au mieux le dépassement précédent, enfin on ajuste si nécessaire l'action intégrale en se fixant un dépassement final compris entre 5 et 10%.

Dans environ 15% des cas les performances d'un PID peuvent devenir insuffisantes en raison de la présence d'un retard trop important dans le modèle du procédé, on fait alors appel à d'autres algorithmes de réglage (notamment : régulateur PIR ou à modèle interne ou à retour d'état).